SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Vrančić

SIMSONOV PRAVAC I POOPĆENJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Robert Simson (14.listopada 1687. - 1.listopada 1768.) bio je škotski matematičar i profesor matematike na Sveučilištu u Glasgowu. Bio je najstariji sin od sedamnaestero muške djece, od kojih je samo njih šest doživjelo odraslu dob. Kao student teologije, po želji svoga oca, okrenuo se matematici jer je smatrao da su argumenti koje teolozi koriste nekoenzistentni i spekulativni.
Školovao se na Sveučilištu u Glasgowu i diplomirao M.A. Njegov glavni doprinos u dijelu matematike je njegov prijevod Euklidovih elemenata i njegova rekonstrukcija izgubljenih djela Eulkida i Apolonija. [7].

Simsonov teorem pripisuje se možda pogrešno Robertu Simsonu jer postoje zapisi koji pokazuju da je taj teorem dokazao ustvari William Wallace, još jedan škotski matematičar rođen u godini smrti R. Simsona. Poznato je da je Wallace objavio dokaz tog teorema 1799. godine, no ne postoje zapisi koji tvrde da je nastavio Simsonova proučavanja. [4].

U ovom diplomskom radu bavit ćemo se Simsonovim pravcem, svojstvima i nekim njegovim poopćenjima. Na početku rada iskažemo i dokažemo teorem o Simsonovom pravcu. Upoznat ćemo se i s drugim skupom kolinearnih točaka kojeg vežemo uz Simsonov pravac, a to je Steinerov pravac. Zatim promatramo međusoban odnos Simsonovog pravca i Steinerovog pravca, nakon čega ćemo istražiti razna svojstva tih pravaca. Tada ćemo pokazati i u kakvom su međusobnom odnosu Simsonovi pravaci dviju točaka kružnice opisane trokutu te kada će oni biti okomiti. Pri kraju rada definirat ćemo poopćeni Simsonov pravac te promatrati kut Simsonovog pravca i poopćenog Simsonovog pravca. Na samom kraju rada promatramo Simsonove pravce svakog od vrhova tetivnog četverokuta.

Poglavlje 1

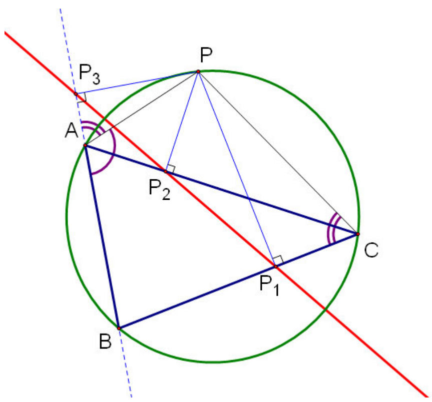
Simsonov pravac

Jedan od najzanimljivijih teorema vezanih uz trokut i proizvoljnu točku kružnice opisane tom trokutu je svakako sljedeći teorem.

Teorem 1.1 (Simsonov teorem)**.** *Neka je dan trokut ABC i njemu opisana kružnica k. Neka je P točka kružnice k i neka su točke P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, AC i AB redom. Tada su točke P_1, P_2 i P_3 kolinearne.*

Dokaz. Teorem dokazujemo prvo za šiljastokutan trokut, zatim za pravokutan i tupokutan trokut.

♦ Pretpostavimo da je trokut ABC šiljastokutan i da je P proizvoljna točka kružnice k. Razlikujemo slučajeve:



Slika 1.1: Ortogonalne projekcije točke P na stranice trokuta ABC

Neka je P jednaka jednoj od točaka A, B, C. Ako je $P = A$ onda je ortogonalna projekcija točke P na pravce CA i AB ta točka, tj. $P_2 = A$ i $P_3 = A$.
P_1, ortogonalna projekcija točke P na pravac BC, je točka na stranici $\overline{BC}$. Točke A i P_1 su kolinearne. Kako dvije ortogonalne projekcije "padaju" u točku A zaključujemo da su P_1, P_2 i P_3 kolinearne.
Analogno je i za slučajeve kada je $P = B$ i $P = C$.

Neka je P proizvoljna točka kružnice različita od točki A, B i C. Tada je točka P ili na kružnom luku $\widehat{CA}$, kojemu ne pripada točka B, ili na kružnom luku $\widehat{AB}$, kojemu ne pripada točka C, ili na kružnom luku $\widehat{BC}$, kojemu ne pripada točka A.
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da točka P pripada kružnom luku $\widehat{CA}$, kojem ne pripada točka B.

Pogledajmo gdje se mogu nalaziti ortogonalne projekcije točke P s obzirom na stranice trokuta ABC. Zbog toga što je točka P na kraćem pripadajućem kružnom luku $\widehat{CA}$ tetive $\overline{CA}$ ortogonalna projekcija točke P na pravac CA nalazi se na stranici $\overline{CA}$.
Za točke P_1 i P_3 nismo sigurni nalaze li se na stranici trokuta ili na njezinu produžetku, to ovisi o položaju točke P. Promatramo kružnicu promjera $\overline{PA}$. Njoj pripada točka P_3 zbog toga što je $\sphericalangle AP_3P$ pravi kut po definiciji točke P_3. Točka P_3 može se nalaziti s jedne ili druge strane promjera $\overline{PA}$, tj. na stranici $\overline{AB}$ ili na njenom produžetku. Ako je kut $\sphericalangle BAP$ tupi kut točka P_3 nalazit će se na produžetku stranice $\overline{AB}$, a ako je kut $\sphericalangle BAP$ šiljasti točka P_3 nalazit će se na stranici $\overline{AB}$. Analogno, o kutu $\sphericalangle PCB$ ovisi da li se točka P_1 nalazi na stranici $\overline{BC}$ ili na produžetku stranice.

Pretpostavimo da P_3 nije na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC nego na njezinu produžetku. (Kao na slici 1.1).
Dokažimo da vrijedi:

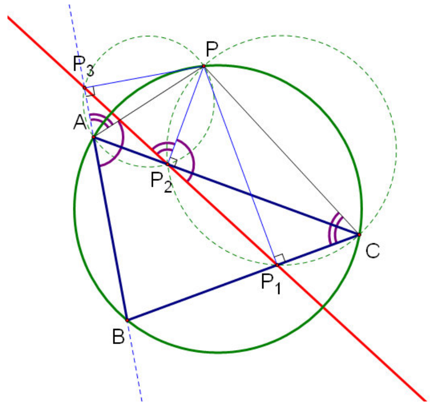
$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PP_2P_3 = \pi.$$

Točka P_2 ortogonalna je projekcija točke P na pravac AC pa je kut $\sphericalangle CP_2P$ pravi kut. Također je i kut $\sphericalangle CP_1P$ pravi kut zbog definicije točke P_1. Primijenjujući obrat Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice zaključujemo da su P_1, P_2, P, C konciklične točke jer pripadaju kružnici promjera $\overline{PC}$. Kako su P, P_2, P_1, C redom točke kružnice vrijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \tag{1.1}$$

Znamo da su P, A, B, C redom točke opisane kružnice trokuta ABC pa vrijedi:

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCB = \pi. \tag{1.2}$$



Slika 1.2: Kružnice promjera $\overline{PC}$ i $\overline{PA}$

Točka P_1 nalazi se na pravcu BC pa vrijedi: $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PCP_1$. Tada je

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \tag{1.3}$$

Iz relacija 1.1 i 1.3 slijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P = \sphericalangle BAP. \tag{1.4}$$

Točke P_2 i P_3 ortogonalne su projekcije točke P na pravce AC i AB pa su kutovi $\sphericalangle PP_2A$ i $\sphericalangle PP_3A$ pravi kutovi te znamo da točke P_2, P_3, P, A pripadaju kružnici promjera $\overline{PA}$ prema obratu Talesovog teorema o obodnom kutu nad promjerom kružnice.
Znamo da su obodni kutovi nad istim kružnim lukom jednake veličine, što primijenjujemo na kružni luk $\widehat{PP_3}$:

$$\sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle PP_2P_3. \tag{1.5}$$

Kako je točka P_3 ortogonalna projekcija točke P na pravac AB znamo da su točke A, B i P_3 kolinearne i vrijedi:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \tag{1.6}$$

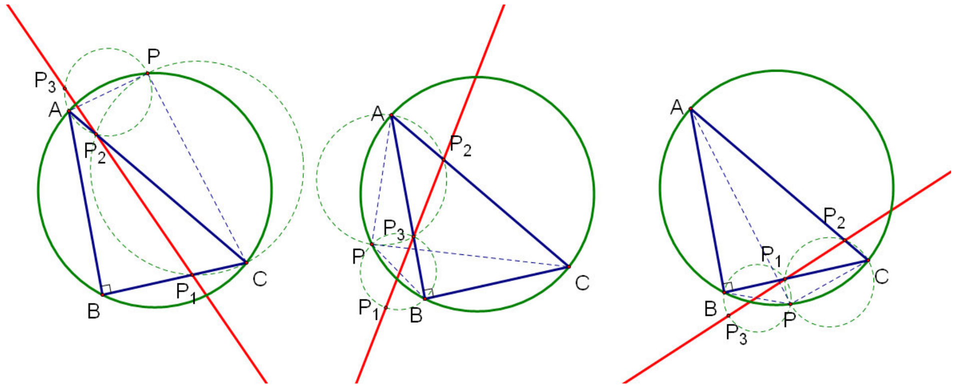
Iz relacija 1.4 i 1.6 slijedi:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi.$$

Primijenimo li na to još i 1.5 imamo:

$$\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi.$$

Čime smo dokazali da su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne.



Slika 1.3: Teorem 1.1 u slučaju pravokutnog trokuta ABC

♦ Pretpostavimo sada da je trokut ABC pravokutan za pravi kut $\sphericalangle ABC$.

Kada je točka P jednaka jednoj od točaka A, B, C imamo analogan slučaj kao za šiljastokutan trokut. Neka je P točka kružnice različita od točki A, B, C. Točke A, B, C dijele kružnicu na tri kružna luka pa ćemo promatrati da je točka P na svakom od tih kružnih lukova.

Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku $\widehat{CA}$, kojem ne pripada točka B. Taj kružni luk dulji je od svih kružnih lukova koje imamo kod šiljastokutnog trokuta. Ponovno ovisno o vrsti kutova $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle PCB$ znamo pripadaju li točke P_1 i P_3 stranicama trokuta. Neka je P_3 na produžetku stranice $\overline{AB}$.

Potrebno je dokazati jednakost: $\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi$.

Točke P_1, P_2, P, C redom su točke kružnice promjera $\overline{PC}$ pa vrijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P + \sphericalangle PCP_1 = \pi. \tag{1.7}$$

Točke P, A, B, C redom su konciklične točke kružnice te vrijedi:

$$\sphericalangle BAP + \sphericalangle PCB = \pi. \tag{1.8}$$

Kako je P_1 na stranici $\overline{BC}$ te iz 1.7 i 1.8 slijedi:

$$\sphericalangle P_1P_2P = \sphericalangle BAP. \tag{1.9}$$

Točke P_2, P_3, P, A su konciklične pa promatramo obodne kutove nad lukom $\widehat{PP_3}$:

$$\sphericalangle PAP_3 = \sphericalangle PP_2P_3. \tag{1.10}$$

Kako su P_3, A, B kolinearne imamo:

$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \tag{1.11}$$

Iz relacija 1.9 i 1.11 na koje primijenimo relaciju 1.10 slijedi:

$$\sphericalangle PP_2P_3 + \sphericalangle P_1P_2P = \pi$$

pa možemo zaključiti da su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne.

Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku $\widehat{AB}$, kojem ne pripada točka C.

Potrebno je dokazati jednakost: $\sphericalangle PP_3P_2 + \sphericalangle P_1P_3P = \pi$.

Točke P, P_3, P_2, A redom su točke kružnice promjera $\overline{PA}$ pa vrijedi:

$$\sphericalangle PAP_2 + \sphericalangle PP_3P_2 = \pi. \tag{1.12}$$

Točke P, B, C, A redom su konciklične točke kružnice te vrijedi:

$$\sphericalangle PAC + \sphericalangle CBP = \pi. \tag{1.13}$$

Zbog toga što je P_2 kolinearna s A i C te iz 1.12 i 1.13 slijedi:

$$\sphericalangle PP_3P_2 = \sphericalangle CBP. \tag{1.14}$$

Točke P, P_1, B, P_3 su konciklične pa promatramo obodne kutove nad lukom $\widehat{PP_1}$:

$$\sphericalangle PP_3P_1 = \sphericalangle PBP_1. \tag{1.15}$$

Kako su P_1, B, C kolinearne imamo:

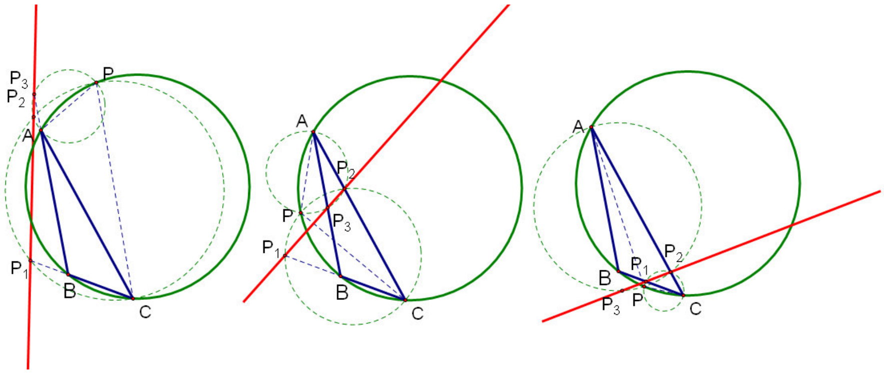
$$\sphericalangle PAP_3 + \sphericalangle BAP = \pi. \tag{1.16}$$

Iz relacija 1.14 i 1.16 na koje primijenimo relaciju 1.15 slijedi:

$$\sphericalangle PP_3P_2 + \sphericalangle P_1P_3P = \pi$$

pa možemo zaključiti da su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne.

Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku BC, kojem ne pripada točka A.
Potrebno je dokazati jednakost: $\sphericalangle P_3P_1P + \sphericalangle PP_1P_2 = \pi$ koja se dokazuje na sličan način kao i prethodni slučaj.



Slika 1.4: Teorem 1.1 u slučaju tupokutnog trokuta ABC

♦ Pretpostavimo sada da je trokut ABC tupokutan za tupi kut $\sphericalangle ABC$.

Kada je točka P jednaka jednoj od točaka A, B, C imamo analogan slučaj kao za šiljastokutan trokut. Neka je P točka kružnice različita od točki A, B, C. Točke A, B, C dijele kružnicu na tri kružna luka pa ponovno promatramo ta tri slučaja.

Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku $\widehat{CA}$, kojem ne pripada točka B. U ovom slučaju ovisno o položaju točke P može se dogoditi da sve ortogonalne projekcije budu na produžetcima stranica trokuta. Dokaz se provodi na analogan način kao i za slučaj pravokutanog trokuta kada je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$ kojem ne pripada točka B.

Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku AB, kojem ne pripada točka C ili Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku BC, kojem ne pripada točka A. Dokazi se provode analogno kao i za pravokutan trokut gdje samo jadna od ortogonalnih projekcija neće biti na stranici trokuta ABC, ovisno o položaju točke P.

Time je teorem dokazan za sva tri slučaja. □

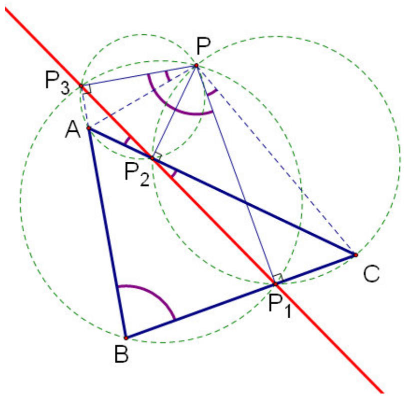
Prethodni teorem dokazali smo za šiljastokutan, pravokutan i tupokutan trokut te smo vidjeli da dokaz teorema ne ovisi o vrsti trokuta. Zbog toga ćemo u nastavku rada promatrati samo šiljastokutne trokute, a dokazi za pravokutne i tupokutne trokute provode se analogno.

Definicija 1.2 (Simsonov pravac)**.** *Pravac kojemu pripadaju ortogonalne projekcije P_1, P_2 i P_3 točke P kružnice opisane trokutu ABC na pravce BC, CA, AB redom nazivamo **Simsonov pravac** točke P u odnosu na trokut ABC i označavamo ga s_P.*

Napomena. U nastavku rada koriste se uvijek iste oznake. Točke P_1, P_2, P_3 su ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB, redom.

Iskažimo sada obrat teorema 1.1.

Teorem 1.3. *Neka je ABC dani trokut, P neka točka te ravnine i neka su točke P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB redom. Ako su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne, onda točka P pripada kružnici opisanoj trokutu ABC.*



Slika 1.5: P je točka ravnine ABC

Dokaz. Pretpostavimo situaciju kao na slici 1.5.
Neka je trokut ABC šiljastokutan i neka je P točka ravnine sa suprotne strane točke B s obzirom na pravac CA. Neka se točka P_3 ne nalazi na stranici $\overline{AB}$ nego na njezinu produžetku, a točke P_1 i P_2 redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Slično se teorem dokazuje i u ostalim situacijama.

Točke P, P_3, A, P_2 su redom konciklične točke jer pripadaju kružnici promjera $\overline{PA}$ pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad lukom $\widehat{P_3A}$:

$$\sphericalangle P_3PA = \sphericalangle P_3P_2A.$$

Kako su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne, kutovi $\sphericalangle P_3P_2A$ i $\sphericalangle P_1P_2C$ imaju zajednički vrh te im krakovi pripadaju istim pravcima (Simsonov pravac i pravac CA) pa zaključujemo da su ti kutovi vršni te vrijedi:

$$\sphericalangle P_3P_2A = \sphericalangle P_1P_2C.$$

Točke P, P_2, P_1, C su redom konciklične točke jer pripadaju kružnici promjera $\overline{PC}$ pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad lukom $\widehat{P_1C}$:

$$\sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle P_1PC.$$

Sada imamo jednakost kutova:

$$\sphericalangle P_1PC = \sphericalangle P_1P_2C = \sphericalangle P_3P_2A = \sphericalangle P_3PA.$$

Točke P, P_3, B, P_1 su redom konciklične točke jer pripadaju kružnici promjera $\overline{PB}$ pa vrijedi:

$$\sphericalangle P_3PP_1 + \sphericalangle P_1BP_3 = \pi. \tag{1.17}$$

Uočimo:

$$\sphericalangle P_3PC = \sphericalangle P_3PP_1 + \sphericalangle P_1PC = \sphericalangle P_3PA + \sphericalangle APC. \tag{1.18}$$

Koristeći se jednakošću kutova $\sphericalangle P_3PA = \sphericalangle P_1PC$ te relacijom 1.18 zaključujemo da je $\sphericalangle P_3PP_1 = \sphericalangle APC$. Kada na relaciju 1.17 primijenimo prethodnu jednakost imamo:

$$\sphericalangle APC + \sphericalangle P_1BP_3 = \pi.$$

Točka P_3 pripada pravcu AB, a točka P_1 pravcu BC pa je:

$$\sphericalangle P_3BP_1 = \sphericalangle ABC,$$

te vrijedi:

$$\sphericalangle APC + \sphericalangle ABC = \pi$$

čime smo dokazali da su točke P, A, B, C konciklične.
Dakle, ako su ortogonalne projekcije P_1, P_2, P_3 kolinearne onda je P točka kružnice opisane trokutu ABC. $\square$

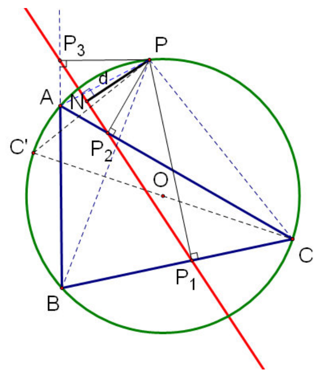
Sada možemo izreći i konačan zaključak o Simsonovom prvacu.

- Dane su nekolinearne točke A, B, C i točka P. Neka su točke P_1, P_2, P_3 ortogonalne su projekcije točke P na pravce BC, CA, AB, redom. Točke P_1, P_2, P_3 kolinearne ako i samo ako je P točka kružnice k opisane trokutu ABC.

Iz dokaza teorema 1.1 je jasno da Simsonov pravac možemo definirati i na drukčiji način.

- Neka je dana kružnica k i neka točka P kružnice k. Povucimo točkom P tri različite tetive $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$. Konstruiramo tri kružnice k_a, k_b, k_c kojima su spomenute tetive promjeri. Te tri kružnice prolaze točkom P i sijeku se u parovima u još tri kolinearne točke. Pravac kojemu pripadaju te točke naziva se Simsonov pravac.

Teorem 1.4. *Neka je P proizvoljna točka kružnice opisane trokutu ABC. Neka su točke P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB redom.*
Tada vrijedi: $|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3| = 2Rd$, gdje je R radijus opisane kružnice, a d udaljenost točke P od Simsonovog pravca s_P. Pravac kojemu pripadaju te tri točke nazivamo Simsonov pravac.



Slika 1.6: Teorem 1.4 u slučaju šiljastokutnog trokuta

Dokaz. Promotrimo situaciju kao na slici 1.6. Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC na kružnom luku $\widehat{CA}$, kojem ne pripada točka B te neka je P_3 na produžetku stranice $\overline{AB}$. Neka je točka N ortogonalna projekcija točke P na Simsonov pravac s_P.

Uočimo trokute PBP_3 i PCP_2 i njihove kutove.
Točke A, B, C, P redom su konciklične točke kružnice opisane trokutu ABC pa možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{PA}$ te imamo: $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA$.
Zbog toga što P_3 pripada pravcu AB imamo: $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PBP_3$ i P_2 pripada pravcu CA pa imamo: $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PCP_2$ stoga vrijedi jednakost kutova $\sphericalangle PBP_3 = \sphericalangle PCP_2$.
Točke P_2 i P_3 su ortogonalne projekcije točke P na pravce CA i AB pa znamo da su $\sphericalangle BP_3P$ i $\sphericalangle CP_2P$ pravi kutovi. Trokuti PBP_3 i PCP_2 imaju sve kutove jednakih veličina pa zaključujemo da su slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.
Zbog sličnosti trokuta vrijedi razmjer

$$\frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PP_3|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3|. \tag{1.19}$$

Promotrimo sada trokute PAP_2 i PBP_1.
Analogno pokažemo da vrijedi: $\sphericalangle P_2AP = \sphericalangle P_1BP$ i da su $\sphericalangle PP_1B$ i $\sphericalangle PP_2A$ pravi kutovi te zaključujemo da su trokuti PAP_2 i PBP_1 slični.
Zbog sličnosti trokuta PAP_2 i PBP_1 vrijedi:

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PP_1|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PP_1|. \tag{1.20}$$

Iz relacija 1.19 i 1.20 slijedi:

$$|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3|. \tag{1.21}$$

Označimo sada s d udaljenost točke P od Simsonovog pravca s_P, $d = |PN|$. Uočimo trokute PNP_3 i PP_2A. Imamo jednakost kutova $\sphericalangle PP_2A = \sphericalangle PNP_3 = \frac{\pi}{2}$ po definiciji točaka N i P_2.
Točke P, P_3, A, P_2 su konciklične točke kružnice promjera $\overline{PA}$ pa imamo jednakost obodnih kutova nad kružnim lukom $\widehat{PP_2}$: $\sphericalangle P_2AP = \sphericalangle P_2P_3P = \sphericalangle NP_3P$ jer je N točka Simsonovog pravca, tj. točke P_3, N, P_2 su kolinearne. Zaključujemo da su trokuti PNP_3 i PP_2A slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.
Zbog sličnosti trokuta PNP_3 i PP_2A vrijedi:

$$\frac{|PP_3|}{|PA|} = \frac{|PN|}{|PP_2|}$$

odnosno

$$|PP_3| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PN|. \tag{1.22}$$

Neka je C' dijametralno suprotna točka točki C na kružnici opisanu trokutu ABC, dakle $|CC'| = 2R$.
Promotrimo trokute $C'PC$ i PP_1B.
Kut $\sphericalangle C'PC$ je kut nad promjerom opisane kružnice pa iz toga slijedi: $\sphericalangle C'PC = \frac{\pi}{2}$. Kako je P_1 ortogonalna projekcija točke P na pravac BC znamo da je $\sphericalangle PP_1B$ pravi kut. Točke P, C', B, C su konciklične točke te je P_1 točka pravca BC pa primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{PC}$: $\sphericalangle CC'P = \sphericalangle CBP = \sphericalangle P_1BP$. Trokuti $C'PC$ i PP_1B su slični po K-K-K poučku o sličnosti trokuta.
Zbog sličnosti trokuta $C'PC$ i PP_1B vrijedi:

$$\frac{|PB|}{|CC'|} = \frac{|PP_1|}{|PC|}$$

odnosno

$$|PB| \cdot |PC| = |CC'| \cdot |PP_1|.$$

Kako su C i C' dijametralno suprotne točke opisane kružnice slijedi $|CC'| = 2R$ te prethodnu jednakost možemo pisati:

$$|PB| \cdot |PC| = 2R \cdot |PP_1|. \tag{1.23}$$

Množeći relacije 1.22 i 1.23 dobivamo

$$|PP_3| \cdot |PP_2| \cdot |PB| \cdot |PC| = |PA| \cdot |PN| \cdot 2R \cdot |PP_1|.$$

Zbog komutativnosti to možemo zapisat:

$$|PB| \cdot |PP_2| \cdot |PC| \cdot |PP_3| = |PA| \cdot |PP_1| \cdot 2R \cdot |PN|.$$

Kako je $|PB| \cdot |PP_2| = |PA| \cdot |PP_1|$ te $|PC| \cdot |PP_3| = |PA| \cdot |PP_1|$ imamo:

$$|PA| \cdot |PP_1| \cdot |PA| \cdot |PP_1| = |PA| \cdot |PP_1| \cdot 2R \cdot |PN|.$$

Sada možemo prethodnu jednakost podijeliti s $|PA \cdot |PP_1|$ nakon čega imamo:

$$|PA| \cdot |PP_1| = 2R|PN|$$

koristeći relaciju 1.21 i $|PN| = d$ konačno dobivamo

$$|PA| \cdot |PP_1| = |PB| \cdot |PP_2| = |PC| \cdot |PP_3| = 2Rd.$$

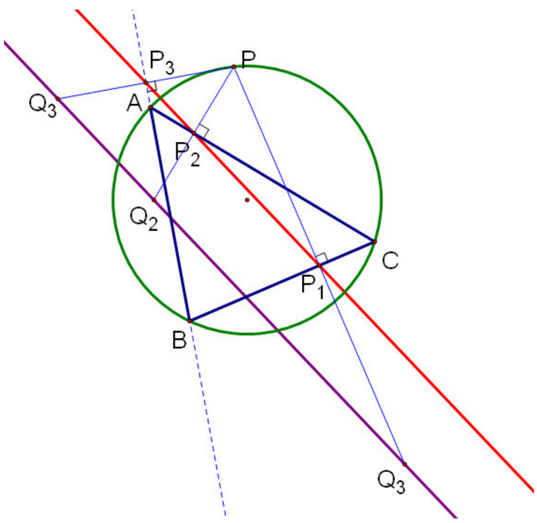
Analogno se teorem dokazuje i u ostalim slučajevima. □

Poglavlje 2

Steinerov pravac

Slijedeći teorem reći će nešto više o još nekim točkama koje ovise o izboru točke P kružnice opisane danom trokutu.

Teorem 2.1. *Neka točka P pripada kružnici k opisanoj trokutu ABC. Neka su Q_1, Q_2, Q_3 točke simetrične točki P s obzirom na pravce BC, AC, AB redom. Tada su točke Q_1, Q_2, Q_3 kolinearne.*



Slika 2.1: Steinerov pravac točke P s obzirom na trokut ABC

Dokaz. Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC različita od A, B, C.
Sjetimo se: P_1, P_2, P_3 su ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB redom i uočimo da je

P_1 polovište dužine $\overline{PQ_1}$,

P_2 polovište dužine $\overline{PQ_2}$,

P_3 polovište dužine $\overline{PQ_3}$.

Promatramo homotetiju Φ sa središtem u točki P i koeficijentom 2.
Točke Q_1, Q_2, Q_3 slike su točaka P_1, P_2, P_3 pri djelovanju homotetije Φ.
Prema teoremu 1.1 znamo da su točke P_1, P_2, P_3 kolinearne na Simsonovom pravcu s_P.
Dakle, točke Q_1, Q_2, Q_3 su kolinearne, pripadaju pravcu koji je slika pravca s_P pri djelovanju homotetije Φ.

Dodatno, Simsonov pravac i pravac kojemu pripadaju točke Q_1, Q_2, Q_3 su paralelni jer homotetija preslikava pravac u njemu paralelan pravac. □

Definicija 2.2. *Pravac kojem pripadaju točke Q_1, Q_2, Q_3 simetrične točki P kružnice opisane trokutu ABC s obzirom na pravce BC, CA, AB redom nazivamo **Steinerovim pravcem** točke P s obzirom na trokut ABC i označavamo ga s d_P.*

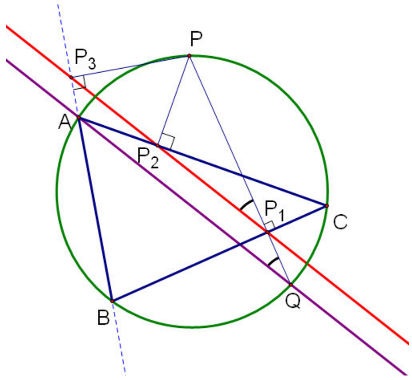
Napomena. Nakon što smo definirali pravac kojemu pripadaju točke Q_1, Q_2, Q_3 možemo reći da su Simsonov pravac i Steinerov pravac točke P s obzirom na trokut ABC međusobno paralelni, $s_p \parallel d_P$.

Teorem 2.3. *Neka je P točka kružnice k opisane trokutu ABC. Točka P_1 ortogonalna je projekcija točke P na pravac BC. Neka je Q druga točka presjeka pravca PP_1 i kružnice k. Tada vrijedi: $\sphericalangle(AQ, PP_1) = \sphericalangle(s_P, PP_1)$, odnosno $AQ \parallel s_P$.*
Specijalno, ako je PP_1 tangenta kružnice k, tj. ako je $Q = P$ također vrijedi $AQ \parallel s_P$.

Dokaz. Imamo situaciju kao na slici 2.2. Neka je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$, kojem ne pripada točka B te neka je ortogonalna projekcija točke P na pravac AB na produžetku stranice $\overline{AB}$.

Točke Q, A, C, P su konciklične jer točka Q pripada kružnici kojoj pripadaju točke A, C, P po njezinoj definiciji. Primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{PA}$, pa imamo:

$$\sphericalangle PQA = \sphericalangle PCA. \tag{2.1}$$



Slika 2.2: Pravac PP_1 presjeca kružnicu k u točki Q

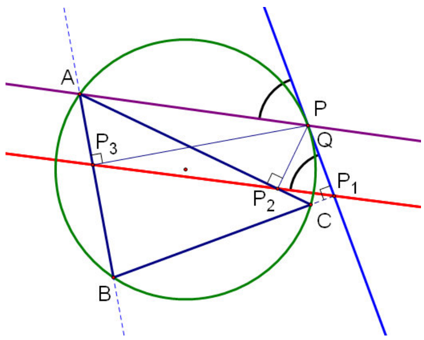
Točke P_1, P_2, C, P su konciklične jer pripadaju kružnici promjera $\overline{CP}$. Uočavamo obodne kutove nad kružnim lukom $\widehat{PP_2}$:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCP_2. \tag{2.2}$$

Kako P_2 pripada pravcu AC vrijedi:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCA. \tag{2.3}$$

Iz relacija 2.1 i 2.3 imamo: $\sphericalangle PQA = \sphericalangle PP_1P_2$. Kutovi su jednake veličine i oba kuta su s istih strana pravca kojemu pripada po jedan krak svakog od kutova pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima, tj. da je pravac AQ paralelan Simsonovom pravcu s_P, $AQ \parallel s_P$.



Slika 2.3: Pravac PP_1 je tangenta kružnice k

Gledamo sliku 2.3 za razmatranje specijalnog slučaja. Neka je pravac PP_1 tangenta u točki P na kružnicu k. Označimo: t_P je pravac točkama P, P_1.

Točke P_1, P_2, C, P su konciklične jer pripadaju kružnici promjera $\overline{CP}$. Primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{PP_2}$: $\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCP_2$.
Točka P_2 je ortogonalna projekcija na pravac AC pa vrijedi:

$$\sphericalangle PP_1P_2 = \sphericalangle PCA.$$

Kružnica k sadrži točke A, C, P, koristeći lemu A.3 da za tangentu t_P kružnice k u točki P vrijedi:

$$\sphericalangle(PA, t_P) = \sphericalangle PCA.$$

Iz prethodne dvije jednakosti imamo: $\sphericalangle(PA, t_P) = \sphericalangle PP_1P_2$, no kako je pravac PP_1 tangenta u točki P na kružnicu k, a točka Q druga točka presijeka tog pravca i kružnice znamo da je $Q = P$ pa jednakost kutova tumačimo: $\sphericalangle(AQ, PP_1) = \sphericalangle(s_P, PP_1)$. Kutovi su jednake veličine i oba kuta su s istih strana tangente pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima, tj. da je pravac AQ paralelan Simsonovom pravcu s_P, $AQ \parallel s_P$. Čime smo dokazali tvrdnju teorema.

□

Sada ćemo iskazati i dokazati lemu koja je potrebna za dokaz sljedećeg teorema. U njoj ćemo definirati točke koje u nastavku rada često spominjemo.

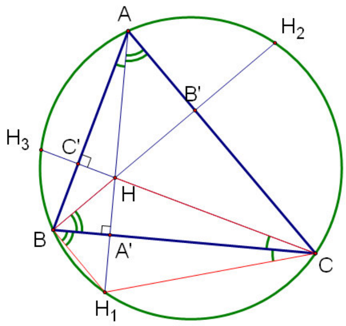
Lema 2.4. *Neka je H ortocentar trokuta ABC i k kružnica opisana trokutu ABC. Neka je H_1 presjek pravca AH i kružnice k, H_2 presjek pravca BH i kružnice k i H_3 presjek pravca AH i kružnice k. Tada su točke H_1, H_2, H_3 simetrične ortocentru trokuta s obzirom na pravce BC, CA, AB, redom.*

Dokaz. Dokazat ćemo da je točka H_1 simetrična ortocentru trokuta H s obzirom na pravac BC jer se na isti način pokaže i za H_2 i H_3.
Neka je A' nožište okomice iz točke A na pravac BC. Analogno definiramo točke B', C'.

Kako su točke A, B, H_1, C konciklične možemo primijeniti teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{BH_1}$ i kružnim lukom $\widehat{H_1C}$:

$$\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle BAH_1,$$

$$\sphericalangle H_1BC = \sphericalangle H_1AC.$$



Slika 2.4: Točke simetrične ortocentru s obzirom na pravce stranica trokuta pripadaju kružnici opisanoj trokutu

Uočimo trokute $C'HA$ i $A'HC$.
Kutovi $\sphericalangle C'HA$ i $\sphericalangle A'HC$ su vršni kutovi jer im krakovi pripadaju istim pravcima i imaju zajednički vrh H pa su jednakih veličina. Kako su C' i A' nožišta okomica na stranice AB i BC slijedi: $\sphericalangle HC'A = \sphericalangle HA'C = \frac{\pi}{2}$. Imamo dva trokuta $C'HA$ i $A'HC$ čija su dva kuta jednakih veličina pa zaključujemo da vrijedi: $\sphericalangle C'AH = \sphericalangle HCA'$.
Zbog toga što C' pripada pravcu AB, a H pravcu AH_1 slijedi:

$$\sphericalangle C'AH = \sphericalangle BAH_1.$$

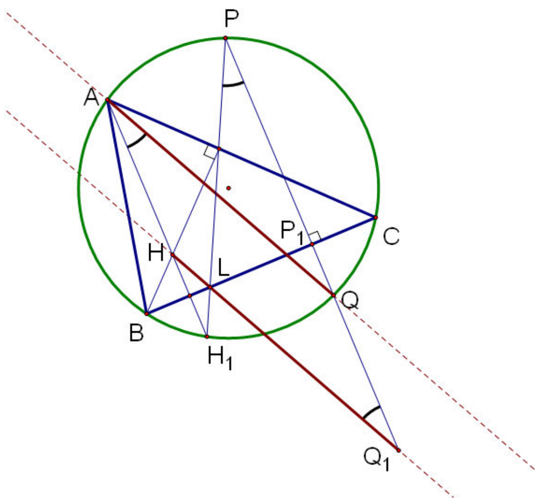
Iz prethodne dvije jednakosti imamo:

$$\sphericalangle HCA' = \sphericalangle BAH_1.$$

Kako je $\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle BAH_1$ i $\sphericalangle HCA' = \sphericalangle BAH_1$ slijedi da je $\sphericalangle BCH_1 = \sphericalangle HCA'$.

Promotrimo sada trokute $H_1A'C$ i $HA'C$.
Kako je A' nožište okomice na stranicu BC te su H, A', H_1 kolinearni znamo da je $\sphericalangle HA'C = \sphericalangle H_1A'C = \frac{\pi}{2}$ te znamo da je $\sphericalangle A'CH_1 = \sphericalangle A'CH$.
Također znamo da je trokutima $H_1A'C$ i $HA'C$ stranica $\overline{A'C}$ zajednička pa po K-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti $H_1A'C$ i $HA'C$ sukladni. Zbog sukladnosti slijedi da je $\overline{HA'} = \overline{H_1A'}$ pa zaključujemo da je točka H_1 simetrična točki H s obzirom na pravac BC.
Analogno dokazujemo simetričnost točke H_2 točki H s obzirom na pravce CA i simetričnost točke H_3 točki H s obzirom na pravac AB. □

Teorem 2.5. *Neka je točka H_1 definirana kao u prethodnoj lemi. Neka je P točka kružnice kojoj pripadaju točke A, B, C, H_1, različita od tih točki te neka je Q druga točka presjeka pravca PP_1 i kružnice k, gdje je P_1 ortogonalna projekcija točke P na pravac BC. Točka Q_1 simetrična je točki P s obzirom na pravac BC.*
Tada vrijedi: $\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$, odnosno $HQ_1 \parallel AQ$.



Slika 2.5: Pravac HQ_1 paralelan s pravcem AQ

Dokaz. Neka je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$ kojemu ne pripada točka B. Neka pravac PP_1 siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u dvije različite točke.
Uočimo da je H simetrična točki H_1 s obzirom na pravac BC te da je Q_1 je simetrična točki P s obzirom na pravac BC.
Iz toga možemo uočiti da je pravac BC os simetrije koji preslikava:

$$H_1 \mapsto H$$
$$P \mapsto Q_1$$
$$Q_1 \mapsto P$$

Označimo presjek pravaca $\overline{PH_1}$ i $\overline{HQ_1}$ s točkom L. Uočimo trokute LP_1P i LP_1Q_1. Stranica $\overline{LP_1}$ im je zajednička, stranice $\overline{P_1P}$ i $\overline{P_1Q_1}$ su jednako duge jer su točke P i Q_1 simetrične s obzirom na pravac BC, kutovi $\sphericalangle PP_1L$ i $\sphericalangle Q_1P_1L$ su pravi jer je pravac PP_1 kojemu pripada točka Q_1 okomit na pravac BC. Po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da su trokuti LP_1P i LP_1Q_1 sukladni. Zbog sukladnosti imamo jednakost kutova:

$$\sphericalangle P_1Q_1L = \sphericalangle LPP_1.$$

No, kako je L presijek pravaca HQ_1 i H_1P te kako su P, P_1, Q_1 kolinearne vrijedi:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1PQ_1. \tag{2.4}$$

Točke H_1, A, P, Q su koncikličke točke kružnice k, pa možemo primijeniti teorem o jednakosti obodnih kutova kružnice nad kružnim lukom $\widehat{H_1Q}$:

$$\sphericalangle H_1PQ = \sphericalangle H_1AQ. \tag{2.5}$$

Iz relacija 2.4 i 2.5 možemo zaključiti:

$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$$

Kako je pravac BC os simetrije znamo:

$$PQ_1 \perp BC$$
$$AH_1 \perp BC$$

iz čega slijedi da je

$$PQ_1 \parallel AH_1.$$

Imamo jednakost kutova $\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1AQ$ i paralelnost pravaca $PP_1 \parallel AH_1$ pa možemo zaključiti da je $HQ_1 \parallel AQ$.

Pretpostavimo sada da je pravac PP_1 tangenta na kružnicu k u točki P. Tada je $Q = P$. Promatramo situaciju na slici 2.6.

A, H_1, P su točke kružnice k. Za tangentu kružnice k u točki P koristeći lemu A.3 vrijedi:

$$\sphericalangle(t_P, PH_1) = \sphericalangle H_1AP. \tag{2.6}$$

Zbog osne simetrije imamo sukladne trokute LPP_1 i LQ_1P, pa vrijedi već pokazana jednakost kutova:

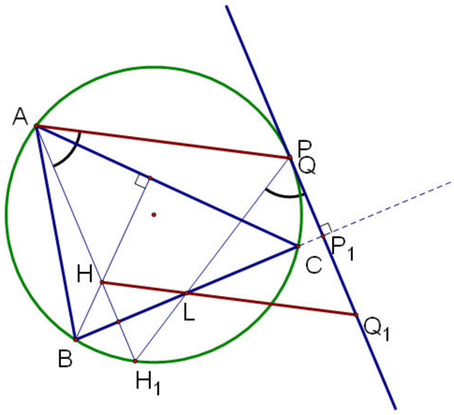
$$\sphericalangle PQ_1H = \sphericalangle H_1PQ_1. \tag{2.7}$$

Koristeći relacije 2.6 i 2.7 možemo zaključiti:

$$\sphericalangle PQ_1H = H_1AQ.$$

Kako je $PQ_1 \parallel AH_1$, jer je BC os simetrije, slijedi da je $HQ_1 \parallel AQ$.
Čime smo dokazali teorem u slučaju da pravac PP_1 siječe kružnicu u jednoj ili dvije točke.

□



Slika 2.6: Pravac PP_1 je tangenta na kružnicu k

Teorem 2.6. *Točka H_1 definirana je kao u lemi 2.4. Neka je P točka kružnice kojoj pripadaju točke A, B, C, H_1, različita od tih točki. Točka H je ortocentar trokuta ABC, točka P_1 ortogonalna je projekcija točke P na pravac BC. Neka je Q druga točka presjeka pravca PP_1 i kružnice k. Tada Steinerov pravac d_P točke P sadrži točku H.*

Dokaz. Iz teorema 2.3 i teorema 2.5 imamo:

$$HQ_1 \parallel AQ$$

$$AQ \parallel s_P$$

odakle slijedi:

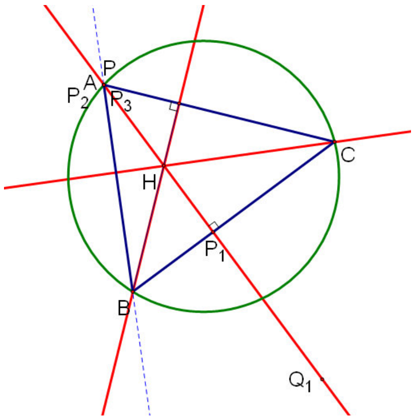
$$HQ_1 \parallel s_P.$$

Pravac HQ_1 je paralelan sa Simsonovim pravcem s_P i sadrži točku Q_1.
Iz dokaza teorema 2.1 i definicije 2.2 znamo da je Steinerov pravac d_P paralelan sa Simsonovim pravcem s_P i da sadrži točku Q_1.
Zaključujemo da je Steinerov pravac d_P ustvari pravac kroz točke H, Q_1.
Dakle, Steinerov pravac d_P sadrži ortocentar H trokuta ABC ako P pripada kružnici k koja prolazi točkama A, B, C, H_1.

□

Dokazali smo da Steinerovom pravcu bilo koje točke kružnice opisane trokutu pripada ortocentar trokuta. Promotrimo Steinerov i Simsonov pravc vrhova trokua.
Specijalano, Simsonovi pravci vrhova trokuta sijeku se u ortocentru trokuta što ćemo pokazati u sljedećem teoremu.

Teorem 2.7. *Dan je trokut ABC i njemu opisana kružnica. Simsonovi pravaci s_A, s_B, s_C sijeku se u ortocentru H trokuta ABC.*

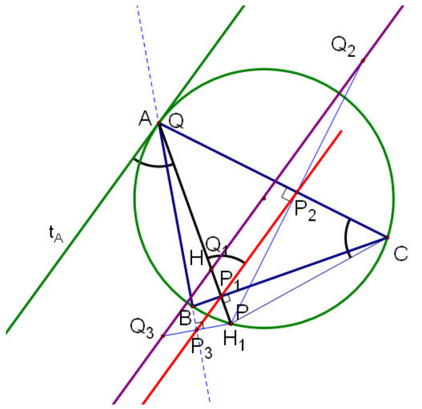


Slika 2.7: Simsonovi pravci vrhova trokuta ABC sijeku se u ortocentru trokuta

Dokaz. Odredimo Simsonov pravac točke A. Ortogonalne projekcije točke A na pravce CA i AB su ta ista točka A, ortogonalna projekcija na pravac BC je točka P_1 koja je ujedno i nožište visine iz točke A na stranicu CB trokuta ABC. Dakle, Simsonovom pravcu pripada točka A i nožište visine iz A pa zaključujemo da je Simsonov pravac s_A ujedno i pravac kojemu pripada visina trokuta iz točke A.
Kako smo u prethodnom teoremu dokazali da Steinerovom pravcu točke kružnice opisane trokutu pripada ortocentar trokuta znamo da Steinerovom pravcu točke A pripada točka A i točka H.
Uočimo da se Simsonov pravac s_A i Steinerov pravac d_A poklapaju.
Na isti način definiramo Simsonov pravc s_B kojemu pripada visina trokuta iz točke B te Simsonov pravc s_C kojemu pripada visina trokuta iz točke C. Analogno dokažemo da se Simsonov pravac s_B i Steinerov pravac s_c poklapaju kao i pravci $s_C = d_C$.
Kako svakom od Simsonovih pravaca s_A, s_B, s_C pripada ortocentar trokuta H zaključujemo da se s_A, s_B, s_C sijeku u točki H. □

Promotrimo sada Simsonov i Steinerov pravac točaka H_1, H_2 i H_3.

Teorem 2.8. *Neka je P točka kružnice k kojoj pripadaju točke A, B, C, H_1, gdje je H_1 definirana kao u lemi 2.4. Neka je t_A tangenta na kružnicu k u točki A.*
Tada je tangenta t_A u točki A kružnice k paralelna sa Simsonovim pravcem s_{H_1} i Steinerovim pravcem d_{H_1}.



Slika 2.8: Paralelnost Simsonovog pravca s_{H_1}, Steinerovog pravca d_{H_1} i tangente t_A

Dokaz. Imamo situaciju kao na slici 2.8. Odredimo Simsonov pravac s_{H_1} i Steinerov pravac d_{H_1} točke H_1 s obzirom na trokut ABC pa zaključujemo da je $P = H_1$.
Neka su točke P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB te neka su Q_1, Q_2, Q_3 simetrične točki P s obzirom na pravce BC, CA, AB.

Točke A, H_1, C pripadaju kružnici k. Za tangentu t_A kružnice k u točki A primjenom leme A.3 vrijedi:

$$\sphericalangle(t_A, AH_1) = \sphericalangle ACH_1.$$

Zbog toga što je $H_1 = P$ točke P_1, P_2, C, H_1 su konciklične točke kružnice promjera $\overline{CH_1}$ pa vrijedi:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle P_2CH_1 = \pi. \tag{2.8}$$

Zato jer je P_2 točka pravca CA vrijedi:

$$\sphericalangle P_2CH_1 = \sphericalangle ACH_1. \tag{2.9}$$

Iz relacija 2.8 i 2.9 imamo:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle ACH_1 = \pi. \tag{2.10}$$

Kako je $P = H_1$ vrijedi da je $Q = A$ jer je Q točka presjeka kružnice opisane trokutu ABC i pravca okomitog na stranicu $\overline{BC}$ iz točke P. Znamo da pravcu PQ, tj pravcu H_1Q pripada točka P_1 pa imamo:

$$\sphericalangle H_1P_1P_2 + \sphericalangle P_2P_1A = \pi. \tag{2.11}$$

Iz relacija 2.10 i 2.11 imamo:

$$\sphericalangle P_2P_1A = \sphericalangle ACH_1.$$

Kut $\sphericalangle P_2P_1A$ je kut između Simsonovog pravca s_{H_1} i pravca AP vrijedi:

$$\sphericalangle(s_{H_1}, AP) = \sphericalangle ACP.$$

Uočimo kako je $\sphericalangle(t_A, AP) = \sphericalangle ACP$ i $\sphericalangle(s_{H_1}, AP) = \sphericalangle ACP$ te možemo zaključiti da su kutovi $\sphericalangle(t_A, AP)$ i $\sphericalangle(s_{H_1}, AP)$ jednakih veličina. Nalaze se sa suprotnih strana pravca kojemu pripada po jedan krak svakog od kutova pa zaključujemo da su to kutovi s paralelnim kracima. Tada vrijedi da je Simsonov pravac s_{H_1} paralelan s tangentom t_A.

Znamo da su Simsonov i Steinerov pravac neke točke međusobno paralelni pa zaključujemo da je Steinerov pravac d_{H_1} paralelan s tangentom t_A. □

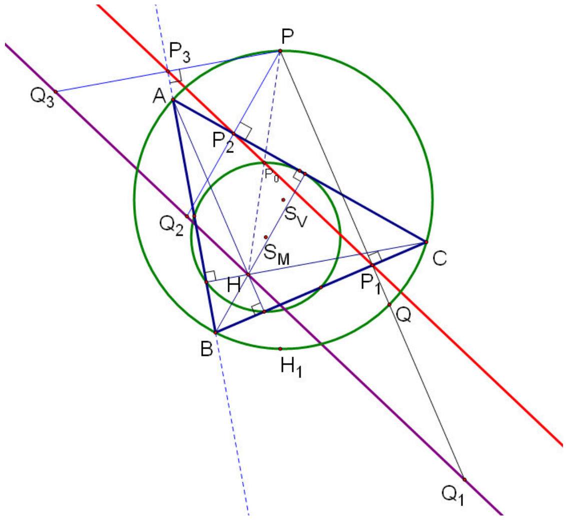
Dokazali smo da su Simsonov i Steinerov pravac točke H_1 paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu ABC u točki A. Na isti način bi iskazali i dokazali i da su Simsonov i Steinerov pravac točke H_2 paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu ABC u točki B te da su Simsonov i Steinerov pravac točke H_3 paralelni s tangentom kružnice opisane trokutu ABC u točki C, gdje su H_2 i H_3 definirane kao u lemi 2.4.

Teorem 2.9. *Simsonovom pravcu s_P točke P kružnice opisane trokutu ABC pripada polovište P_0 dužine $\overline{PH}$ gdje je H ortocentar trokuta ABC.*

Dokaz. Iz teorema 2.6 znamo da ortocentar H trokuta ABC pripada Steinerovom pravcu d_P. Promotrimo homotetiju Ψ sa središtem u točki P i koeficijentom $\frac{1}{2}$.
Simsonov pravac s_P slika je Steinerovog pravca d_P, primijenimo li homotetiju Ψ.
Točka H pripada Steinerovom pravcu d_P, dakle točka koja je slika točke H pri homotetiji Ψ pripada Simsonovom pravcu s_P.
Označimo s P_0 točku homotetičnu točki H. Točka P_0 dobivena tom homotetijom polovište je dužine $\overline{HP}$. Pa zaključujemo da polovište P_0 pripada Simsonovom pravcu s_P.

□

Teorem 2.10. *Neka je P točka kružnice opisane trokutu ABC, H ortocentar trokuta ABC, P_0 je polovište dužine $\overline{PH}$. Tada točka P_0 pripada Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC.*



Slika 2.9: Feuerbachova kružnica trokuta ABC

Dokaz. Označimo Feuerbachovu kružnicu s k'.
Zbog leme A.5 znamo da je Feuerbachova kružnica trokuta ABC slika opisane kružnice trokuta ABC, sa središtem homotetije H i koeficijentom $\frac{1}{2}$. Kako je P_0 polovište dužine $\overline{PH}$ primjenom te iste homotetije znamo da je P_0 slika točke P.

Kako P pripada kružnici k tako P_0, polovište dužine $\overline{PH}$, pripada Feuerbachovoj kružnici k'.

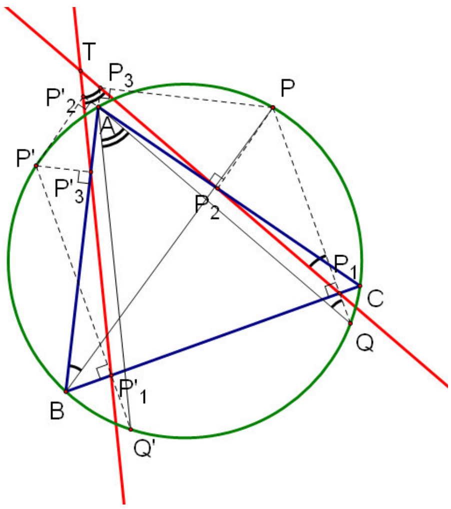
□

Poglavlje 3

Okomiti Simsonovi pravci

U ovom poglavlju promatrat ćemo međusoban odnos dvaju Simsonovih pravaca te u kakvom su međusobnom odnosu točke kružnice ako su Simsonovi pravci tih točaka okomiti. Istražit ćemo geometrijsko mjesto točaka presjeka dvaju okomitih Simsonovih pravaca.

Teorem 3.1. *Neka su P i P' dvije različite točke kružnice opisane trokutu ABC koje određuju dva Simsonova pravca s_P i $s_{P'}$. Tada je kut između Simsonovih pravaca s_P i $s_{P'}$ jednak polovici središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{PP'}$.*



Slika 3.1: Kut dvaju Simsonovih pravaca

Dokaz. Promotrimo situaciju kao na slici 3.1. Neka su točke P i P' na različitim kružnim lukovima. Neka je točka P na kružnom luku $\widehat{CA}$ kojoj ne pripada točka B, a točka P' na kružnom luku $\widehat{AB}$ kojem ne pripada točka C. Neka su P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB, te P_1', P_2', P_3' ortogonalne projekcije točke P' na pravce BC, CA, AB.
Točka Q presjek je pravca PP_1 i kružnice opisane trokutu ABC. Analogno definiramo i točku Q'. Označimo točkom T presijek Simsonovih pravaca s_p i $s_{P'}$.
Iz teorema 2.3 slijedi paralelnost pravaca:

$$AQ \parallel s_p. \tag{3.1}$$

Analogno, gledamo li točku P' imamo paralelnost:

$$AQ' \parallel s_{P'}. \tag{3.2}$$

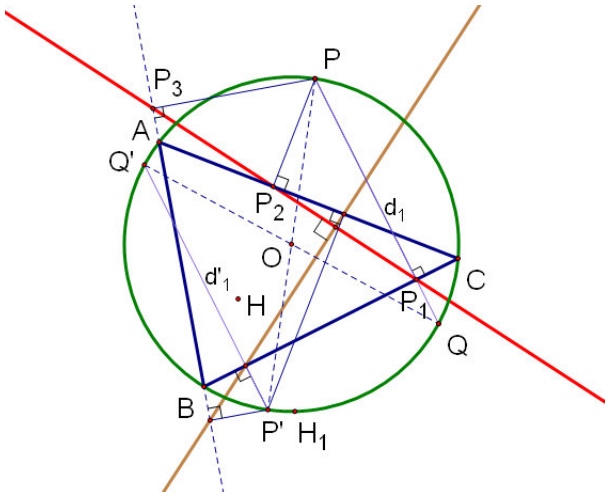
Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ sijeku se u točki T dok se pravci AQ i AQ' sijeku u točki A. Promotrimo kut koji zatvaraju Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$, kut $\sphericalangle P_1'TP_1$, i kut koji zatvaraju pravci AQ i AQ', kut $\sphericalangle Q'AQ$. Kako je $AQ \parallel s_p$ i $AQ' \parallel s_{P'}$ uočavamo da su $\sphericalangle P_1'TP_1$ i $\sphericalangle Q'AQ$ kutovi s paralelnim kracima pa vrijedi:

$$\sphericalangle P_1'TP_1 = \sphericalangle Q'AQ. \tag{3.3}$$

Znamo da je $\sphericalangle Q'AQ$ obodni kut kružnice nad kružnim lukom $\widehat{Q'Q}$ pa možemo primijeniti teorem o obodnom i središnjem kutu kružnice nad istim kružnim lukom te zaključujemo da je kut $\sphericalangle Q'AQ$ jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{Q'Q}$. Primijenimo li relaciju 3.3 dobijemo da je kut $\sphericalangle P_1'TP_1$ jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{Q'Q}$. Kako su pravci PQ i $P'Q'$ okomiti na pravac BC slijedi da su međusobno paralelni te zaključujemo da je duljina kružnog luka $\widehat{Q'Q}$ jednaka duljini kružnog luka $\widehat{PP'}$ pa imamo da je kut $\sphericalangle P_1'TP_1$ jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{P'P}$. Čime smo dokazali da je kut između Simsonovih pravaca s_p i $s_{P'}$ jednak polovini središnjeg kuta nad kružnim lukom $\widehat{PP'}$.

□

Teorem 3.2. *Neka su P i P' dvije različite točke kružnice k opisane trokutu ABC koje određuju dva Simsonova pravca s_P i $s_{P'}$. Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ su međusobno okomiti ako i samo ako su točke P i P' dijametralno suprotne s obzirom na kružnicu k.*



Slika 3.2: Pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno su okomiti

Dokaz. Neka su Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno okomiti. Dokazat ćemo da su P i P' dijametralno suprotne s obzirom na kružnicu k.
Promatramo situaciju kao na slici 3.2. Neka je P_1 ortogonalna projekcija točke P na pravac BC i P'_1 ortogonalna projekcija točke P' na pravac BC. Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ su okomiti, tj. kut koji zatvaraju $\sphericalangle(s_P, s_{P'}) = \frac{\pi}{2}$ pa kao u dokazu prethodnog teorema znamo da je tada i kut $\sphericalangle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$, gdje je Q presjek pravca PP_1 i kružnice k te Q' presjek pravca $P'P'_1$ i kružnice k.
Razlikovat ćemo slučajeve kada je:

$$Q \neq A \text{ i } Q' \neq A,$$

$$Q = A \text{ i } Q' \neq A,$$

$$Q \neq A \text{ i } Q' = A.$$

Znamo da položaj točaka Q i Q' ovisi o izboru točaka P i P'. Ako je $Q = A$ onda je P presjek okomice iz A na pravac BC i kružnice k, a tako je u lemi 2.4 definirana točka H_1. Analogno je i u slučaju kada je $Q' = A$.

Zbog toga razlikujemo slučajeve:

- Ako je $P \neq H_1$ i $P' \neq H_1$.
  Tada je: $Q \neq A, Q' \neq A$ pa iz teorema 2.3 znamo da je $s_P \parallel AQ, s_{P'} \parallel AQ'$.
  Kako su Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno okomiti vrijedi okomitost pravaca AQ i AQ'. Točke A, Q, Q su točke kružnice k te pravci AQ i AQ' mogu biti međusobno okomiti samo ako je $\sphericalangle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$, tj. Q i Q' su dijemetralno suprotne točke s obzirom na kružnicu k. Kako je $PQ \perp BA$ i $P'Q' \perp BC$ imamo paralelnost $PQ \parallel P'Q'$ i dijametralno suprotne točke Q i Q' pa zaključujemo da su tada P i P' dijametralno suprotne točke kružnice k.

- Ako je $P = H_1$, onda je $P' \neq H_1$ (jer je $P \neq P'$).
  Tada je: $Q = A$ i $Q' \neq A$. Jer je $Q = A$ po teoremu 2.6 imamo da je $s_P \parallel t_A$, a zbog toga što je $Q' \neq A$ imamo da je $s_{P'} \parallel AQ'$.
  Zbog okomitosti Simsonovih pravaca $s_P \perp s_{P'}$ zaključujemo da je $t_A \perp AQ'$ gdje je t_A tangenta kružnice k u točki A.
  Kako su s_P i $s_{P'}$ međusobno okomiti vrijedi da su A i Q' su dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu k ali je $A = Q$, odakle imamo da su Q i Q' su dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu k. Analogno zaključujemo da su tada P i P' dijametralno suprotne točke kružnice k.

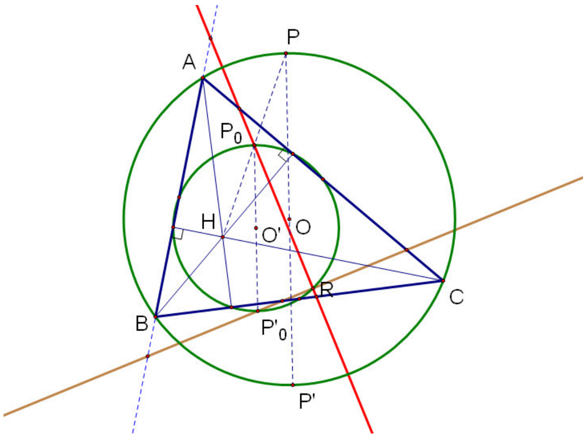
- Ako je $P' = H_1$, onda je $P \neq H_1$.
  Na isti način zaključimo:
  Ako je $s_P \perp s_{P'}$ onda su Q i Q' dijametralno suprotne točke s obzirom na kružnicu k. Analogno, P i P' su dijametralno suprotne točke kružnice k kada su Simsonovi pravci s_P $s_{P'}$ međusobno okomiti.

U sva tri slučaja došli smo do istog zaključka ako su Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno okomiti tada su P i P' su dijametralno suprotne točke kružnice k.

Ostaje nam pokazati da su Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno okomiti ako su P i P' dijametralno suprotne točke kružnice opisane trokutu ABC.
Taj obrat slijedi nam direktno iz prethodnog teorema. Ako znamo da su P i P' dijametralno suprotne točke onda su i Q i Q' dijametralno suprotne točke po njihovoj definiciji. Tada znamo i da je $\sphericalangle Q'AQ = \frac{\pi}{2}$. Kako je $AQ \parallel s_P$ i $AQ' \parallel s_{P'}$ zaključujemo da je kut između Simsonovih pravaca pravi, tj. da su Simsonovi pravci međusobno okomiti.

Dakle, Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ međusobno su okomiti ako i samo ako su P i P' dijametralno suprotne točke kružnice k. $\square$

Teorem 3.3. *Neka je H ortocentar trokuta ABC i neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC te neka su P i P' dijametralno suprotne kružnice k.*
Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ sijeku se u točki R koja pripada Feuerbachovoj kružnici trokuta ABC.



Slika 3.3: Pravci s_P i $s_{P'}$ sijeku se u točki Feuerbachove kružnice

Dokaz. Neka je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$ kojemu ne pripada točka B. Neka su točke P i P' dijametralno suprotne točke kružnice k, tada su s_P i $s_{P'}$ okomiti pravci, koji se sijeku u točki R. Neka je k' Feuerbachova kružnica trokuta ABC. Točka O je središte trokutu opisane kružnice k, a točka O' središte Feuerbachove kružnice k'.

Promatramo homotetiju Ψ sa središtem u točki H i koeficijentom $\frac{1}{2}$.
Znamo da je Feuerbachova kružnica k' trokuta ABC slika kružnice k opisane trokutu primjenom homotetije Ψ, što nam pokazuje i lema A.5 u dodatku rada.

Neka je P_0 polovište dužine $\overline{HP}$ i P_0' polovište dužine $\overline{HP'}$.

Promatramo djelovanje homotetije Ψ:

$\Psi(P) = P_0$, znamo da je $P \in k$ pa tada vrijedi da je $P_0 \in k'$,

$\Psi(P') = P_0'$, znamo da je $P' \in k$ pa tada vrijedi da je $P_0' \in k'$,

$\Psi(O) = O'$.

Točke P i P' su dijametralno suprotne točke kružnice k i O polovište dužine $\overline{PP'}$.
Uočimo trokute PHP' i $P_0HP'_0$. Kut pri vrhu H im je zajednički, a krakovi im pripadaju istim pravcima pa zaključujemo da su trokuti PHP' i $P_0HP'_0$ slični po S-S-S poučku o sličnosti trokuta. Znamo da O' pripada pravcu $P_0P'_0$. Kako je O polovište dužine $\overline{PP'}$ zbog sličnosti trokuta slijedi da je O' polovište dužine $\overline{P_0P'_0}$. Točke P_0 i P'_0 dijametralno su suprotne s obzirom na kružnicu k'. Dakle $\overline{P_0P'_0}$ je promjer kružnice k'.
Znamo da su Simsonovi pravci s_P i $s_{P'}$ okomiti i da se sijeku u točki R.
Kako P_0 pripada Simsonovom pravcu s_P te P'_0 pripada Simsonovom pravcu $s_{P'}$ zaključujemo da je

$$\sphericalangle P_0RP'_0 = \frac{\pi}{2},$$

a kako je $\overline{P_0P'_0}$ promjer Feuerbachove kružnice zaključujemo da R pripada Feuerbachovoj kružnici.
Time smo pokazali da se okomiti Simsonovi pravci sijeku u točki Feuerbachove kružnice.

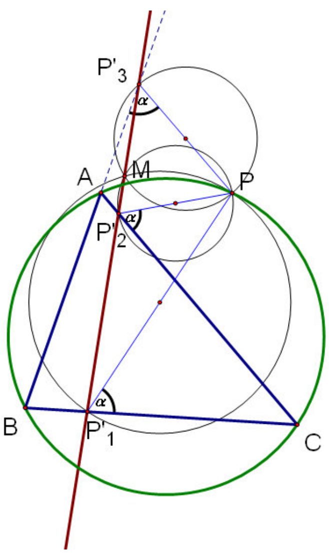
$\square$

Poglavlje 4

Poopćeni Simsonov pravac

Možemo li nekako poopćiti Simsonov pravac točke P kružnice opisane trokutu ABC s obzirom na taj trokut? Moramo li uvijek promatrati ortogonalne projekcije točke P? To ćemo vidjeti u sljedećem teoremu.

Teorem 4.1. *Dan je kut α. Neka je ABC trokut i neka je P točka kružnice k opisane trokutu. Neka su P_1', P_2', P_3' točke na pravcima BC, CA, AB redom tako da pravci PP_1', PP_2', PP_3' zatvaraju s pravcima BC, CA, AB kut α.*



Slika 4.1: Točke P_1', P_2', P_3' su kolinearne

Dokaz. Neka je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$ kojemu ne pripada točka B. Neka je P_3 točka na produžetku stranice AB.
Opišimo kružnice kojima su dužine $\overline{PP_2'}, \overline{PP_3'}$ promjeri. Promatramo sliku 4.1. Te se kružnice sijeku u dvije točke. Jedna od njih je točka P, a drugu označimo točkom M.
Želimo prvo dokazati da su točke P_3', M, P_2' kolinearne, tj. da je kut $\sphericalangle P_2'MP_3'$ ispruženi kut.
Promatrajmo kutove $\sphericalangle P_2'MP$ i $\sphericalangle PMP_3'$.
Točke P, M, P_2' su točke kružnice promjera $\overline{PP_2'}$. Prema teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice zaključujemo da je $\sphericalangle P_2'MP = \frac{\pi}{2}$. Analogno tome kut $\sphericalangle PMP_3' = \frac{\pi}{2}$ jer je to obodni kut nad promjerom kružnice promjera $\overline{PP_3'}$.
Dakle, imamo da je $\sphericalangle PMP_3' = \sphericalangle P_2'MP = \frac{\pi}{2}$, tj. $\sphericalangle P_2'MP_3' = \pi$, što znači da su točke P_2', M, P_3' kolinearne.

Opišimo kružnicu kojoj je dužina $\overline{PP_1'}$ promjer. Uočimo da se sve tri kružnice sijeku u točkama P i M.
Dokažimo da su točke P_1', M, P_3' kolinearne, tj. da je kut $\sphericalangle P_1'MP_3' = \pi$. Promatramo kružnice s promjerom $\overline{PP_1'}$ i $\overline{PP_3'}$.
Potpuno analogno pokažemo da je: $\sphericalangle PMP_3' = \sphericalangle P_1'MP = \frac{\pi}{2}$, tj. $\sphericalangle P_1'MP_3' = \pi$.

Znamo da su točke P_2', M, P_3' kolinearne i da su točke P_1', M, P_3' kolinearne pa zaključujemo da su točke P_1', P_2', P_3' kolinearne.

□

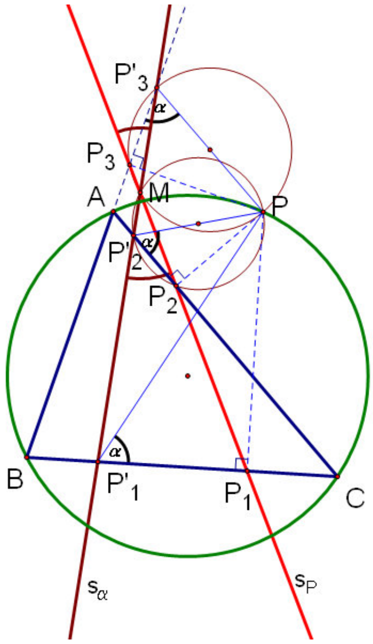
Definicija 4.2. *Dan je kut α. Točke P_1', P_2', P_3' su na pravcima BC, CA, AB redom tako da pravci PP_1', PP_2', PP_3' zatvaraju s pravcima BC, CA, AB kut α. Tako definrane točke P_1', P_2', P_3' su kolinearne, pripadaju pravcu kojeg nazivamo* ***poopćeni Simsonov pravac****.*

Teorem 4.3. *Dan je kut α. Neka je ABC trokut i P točka kružnice opisane tom trokutu. Tada poopćeni Simsonov pravac za dani kut α i danu točku P sa Simsonovim pravcem točke P zatvara kut $\pi - \alpha$.*

Dokaz. Neka je P točka kružnog luka $\widehat{CA}$ kojemu ne pripada točka B. Neka su P_1, P_2, P_3 ortogonalne projekcije točke P na pravce BC, CA, AB, gdje je P_3 na produžetku stranice $\overline{AB}$, točke P_1', P_2', P_3' su na pravcima BC, CA, AB redom tako da pravci PP_1', PP_2', PP_3' zatvaraju s pravcima BC, CA, AB kut α.

Imamo situaciju kao na slici 4.2. Uočimo trokute $P_1'P_1P$, $P_2'P_2P$ i $P_3'P_3P$.
Po definiciji točki P_1', P_2', P_3' imamo:

$$\sphericalangle P_1P_1'P = \sphericalangle P_2P_2'P = \sphericalangle P_3P_3'P = \alpha.$$



Slika 4.2: Presjek poopćenog Simsonovog pravaca (s_α) i Simsonovog pravca (s_P)

Po definiciji točki P_1, P_2, P_3 imamo:

$$\sphericalangle PP_1P_1' = \sphericalangle PP_2P_2' = \sphericalangle PP_3P_3' = \frac{\pi}{2}.$$

Prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $P_1'P_1P$, $P_2'P_2P$ i $P_3'P_3P$ slični. Zbog sličnosti trokuta imamo jednakost svih kutova trokuta.

Označimo: $\sphericalangle P_1'PP_1 = \sphericalangle P_2'PP_2 = \sphericalangle P_3'PP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Točka M je sjecište kružnica iz prethodnog teorema. Pokažimo da je M sjecište poopćenog Simsonovog pravca i Simsonovog pravca.
Opišimo kružnice promjera $\overline{PP_2'}$ i $\overline{PP_3'}$. Iz dokaza teorema 4.3 znamo da se te kružnice sijeku u točkama P i M. Promotrimo kružnicu promjera $\overline{PP_2'}$ i točku P_2. Točka P_2 pripada kružnici promjera $\overline{PP_2'}$ jer je kut $\sphericalangle PP_2P_2'$ pravi kut nad hipotenuzom $\overline{PP_2'}$, tj. nad promjerom kružnice. Ako promatramo kružnicu promjera $\overline{PP_3'}$ i točku P_3 analogno dolazimo do zaključka da točka P_3 pripada kružnici promjera $\overline{PP_3'}$.

Točke P, M, P_2', P_2 pripadaju kružnici promjera $\overline{PP_2'}$. Primjenjujući teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{P_2P_2'}$ imamo:

$$\sphericalangle P_2'MP_2 = \sphericalangle P_2'PP_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Točke P, M, P_3', P_3 pripadaju kružnici promjera $\overline{PP_3'}$. Ponovno primjenjujemo teorem o obodnim kutovima nad kružnim lukom $\widehat{P_3P_3'}$ imamo:

$$\sphericalangle P_3'MP_3 = \sphericalangle P_3'PP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Slijedi:

$$\sphericalangle P_2'MP_2 = \sphericalangle P_3'MP_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Kako znamo da su P_2', M, P_3' kolinearne zaključujemo da su $\sphericalangle P_2'MP_2$ i $\sphericalangle P_3'MP_3$ vršni kutovi pa su time i točke P_2, M, P_3 kolinearne, tj. točka M pripada i Simsonovom pravcu.
Dakle, točka M je točka presjeka Simsonovog pravca i poopćenog Simsonovog pravca te veličina kuta između tih pravaca iznsi $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

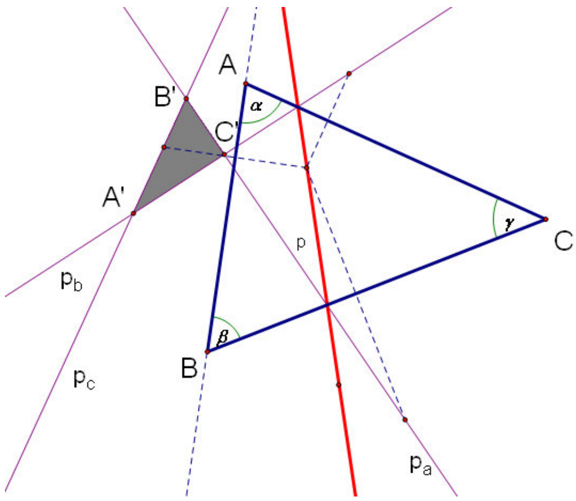
□

Poglavlje 5

Još neki teoremi o Simsonovom pravcu

Položaj Simsonovog pravca u ondosu na dani trokut ovisi o položaju točke P kružnice opisane tom trokutu. Što se dogada ako imamo neki pravac i dani trokut, a ne točku kružnice vidjet ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 5.1. *Neka je dan trokut ABC i pravac p. Neka su p_a, p_b, p_c pravci simetrični pravcu p s obzirom na pravce BC, CA, AB, redom. Neka je A presijek pravca p_b i p_c, B je presijek pravca p_a i p_c, C je presijek pravca p_a i p_b.*
Svi tako dobiveni trokuti $A'B'C'$, za različite pravce p, su međusobno slični.



Slika 5.1: Trokut $A'B'C'$

Dokaz. Imamo situaciju kao na slici 5.1. Neka pravac p siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ABC.
Pravac p_a preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac BC te dobijemo pravac p. Zatim pravac p osnom simetrijom s obzirom na pravac CA preslikamo u pravac p_b.
U tom slučaju imamo kompoziciju osne simetrije s obzirom na pravac BC i osne simetrije s obzirom na pravac CA. Znamo da se ti pravci sijeku u točki C.
Lema A.1 nam kaže da je kompozicija dvije osne simetrije kojima se osi sijeku u nekoj točki rotacija s centrom u toj točki i to za dvostruki kut što ga zatvaraju te dvije osi.

Označimo unutarnje kutove trokuta ABC s α, β, γ.
U našem slučaju imamo rotaciju za kut 2γ oko centra C koja preslikava $p_a \longmapsto p_b$.

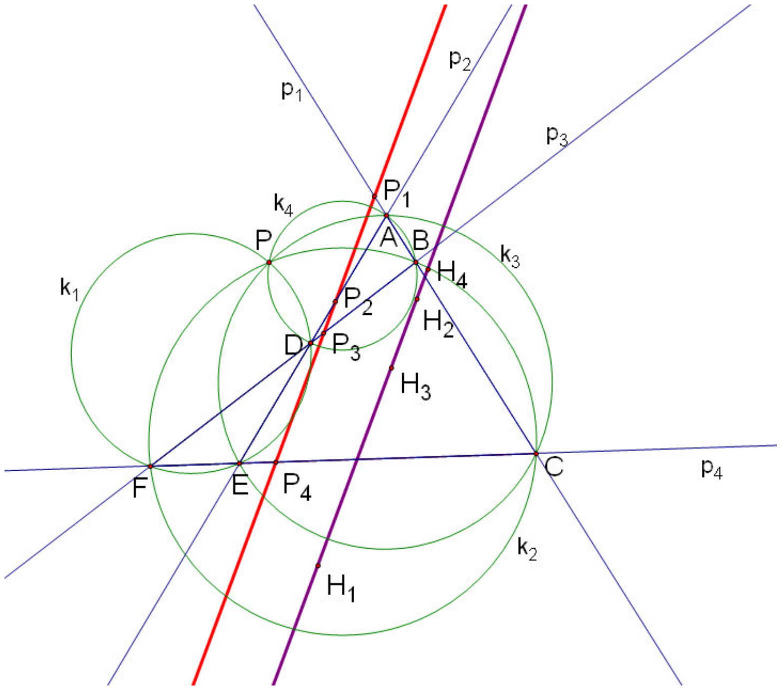
Analogno pravac p_b preslikamo osnom simetrijom s obzirom na pravac CA te dobijemo pravac p. Zatim pravac p osnom simetrijom s obzirom na pravac AB preslikamo u pravac p_c.
Ponovno imamo kompoziciju dvije osne simetrije što je u ovom slučaju rotacija s centrom u točki A za kut 2α koja preslikava $p_b \longmapsto p_c$.
Analogno, rotacija za kut 2β oko centra B preslikava $p_c \longmapsto p_a$.

Vidimo dakle da kutovi trokuta $A'B'C'$ ne ovise o položaju pravca p nego samo o pravcima kojima pripadaju stranice trokuta, tj. o kutovima danog trokuta ABC, čime dokazujemo teorem.

□

Teorem 5.2. *Neka su dana četiri pravca p_1, p_2, p_3, p_4 od kojih se nijedna tri ne sijeku. Svaka trojka od tih pravaca određuje jedan trokut čiji su vrhovi sjecišta tih pravaca, a stranice trokuta pripadaju tim pravcima. Neka je A presijek pravaca p_1 i p_2, B presijek pravaca p_1 i p_3, C presijek pravaca p_1 i p_4, D presijek pravaca p_2 i p_3, E presijek pravaca p_2 i p_4, F presijek pravaca p_3 i p_4. Tada kružnice opisane trokutima DEF, BCF, ACE i ABD prolaze jednom točkom P te ravnine.*

Dokaz. Promatramo situaciju kao na slici 5.2.
Neka je k_1 kružnica opisana trokutu DEF, k_2 kružnica opisana trokutu BCF, k_3 kružnica opisana trokutu ACE, k_4 kružnica opisana trokutu ABD. Neka su P_1, P_2, P_3, P_4 ortogonalne projekcije točke P na pravce p_a, p_b, p_c, p_d.
Promotrimo sjecišta kružnica k_3 i k_4. One se sijeku u dvije točke. Jedna je točka A, a drugu označimo s P.
Promotrimo trokut ABD. Ortogonalne projekcije točke P na pravce kojima pripadaju stranice trokuta ABD su P_1, P_2, P_3 jer stranice trokuta ABD pripadaju pravcima p_a, p_b, p_c.



Slika 5.2: Kružnice opisane trokutima koje određuju četiri pravca prolaze istom točkom P. Ortocentri trokuta pripadaju Steinerovom pravcu točke P.

Znamo da su te točke kolinearne i da pripadaju Simsonovom pravcu s_P točke P s obzirom na trokut ABD.
Promotrimo i trokut ACE. Ortogonalne projekcije točke P na pravce kojima pripadaju stranice trokuta ACE su P_1, P_2, P_4 jer stranice trokuta ACE pripadaju pravcima p_a, p_b, p_d. Analogno, P_1, P_2, P_4 su kolinearne, tj. točke Simsonovog pravca točke P s obzirom na trokut ACE.

Točke P_1, P_2, P_3 su kolinearne i točke P_1, P_2, P_4 su kolinearne pa odmah zaključujemo da su sve četiri ortogonalne projekcije P_1, P_2, P_3, P_4 kolinearne točke. Odnosno točke P_1, P_2, P_3, P_4 pripadaju Simsonovom pravcu točke P s obzirom na trokute ABD i ACE.
Kako stranice trokuta DEF pripadaju pravcima p_2, p_3, p_4, a stranice trokuta BCF pripadaju pravcima p_1, p_3, p_4 znamo da i ortogonalne projekcije točke P na stranice tih trokuta pripadaju Simsonovom pravcu točke P s obzirom na trokute DEF i BCF.

Konačno možemo zaključiti da sve četiri ortogonalne projekcije pripadaju Simsonovom pravcu točke P s obzirom na sva četiri trokuta. □

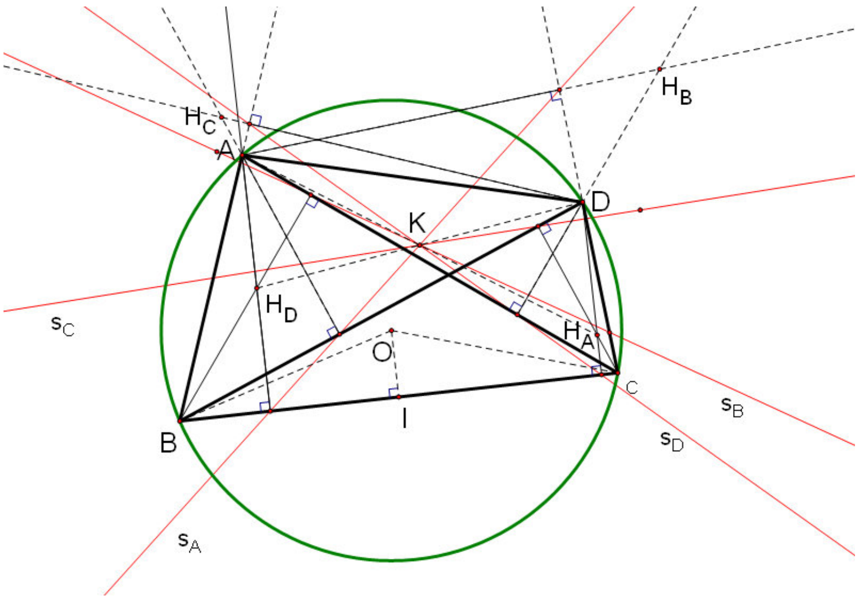
Teorem 5.3. *Neka su H_1, H_2, H_3, H_4 redom ortocentri trokuta DEF, BCF, ACE i ABD koji su definirani u prethodnom teoremu. Tada su H_1, H_2, H_3, H_4 kolinearne i pripadaju Steinerovom pravcu točke P s obzirom na sva četiri trokuta DEF, BCF, ACE i ABD.*

Dokaz. Promatramo sliku 5.2.
Iz teorema 2.6 znamo da ortocentar trokuta pripada Steinerovom pravcu točke P s obzirom na dani trokut i da je Steinerov pravac slika Simsonovog pravca točke P s obzirom na dani trokut pri homotetiji sa središtem u točki P i koeficijentom 2.
Možemo zaključiti da je Simsonov pravac danog trokuta jednako udaljen od točke P i Steinerovog pravca točke P s obzirom na sva četiri trokuta.
Točka P zajednička je točka sve četiri kružnice k_1, k_2, k_3, k_4.
Iz prethodnog teorema znamo da ortogonalne projekcije P_1, P_2, P_3, P_4 točke P na stranice trokuta DEF, BCF, ACE i ABD pripadaju Simsonovom pravcu točke P s obzirom na sva četiri trokuta.
Steinerov pravac svakog od danih trokuta je paralelan s tim zajedničkim Simsonovim pravcem. Svi ti Steinerovi pravci su slika Simsonovog pravca pri homotetiji sa središtem u točki P i koeficijentom 2. Kako je P zajednička točka svih opisanih kružnica k_1, k_2, k_3, k_4 trokuta DEF, BCF, ACE i ABD zaključujemo da se Steinerovi pravci točke P s obzirom na trokuta DEF, BCF, ACE i ABD poklapaju.
Dakle, ortocentri H_1, H_2, H_3, H_4 trokuta DEF, BCF, ACE i ABD su kolinearni i pripadaju Steinerovom pravcu točke P s obzirom na sva četiri trokuta, te je Simsonov pravac točke P s obzirom na sva četiri trokuta DEF, BCF, ACE i ABD jednako udaljen od njega kao i od točke P.

□

Neka je dan je četverokut kojemu je opisana kružnica. Promatramo Simsonove pravce svake od točaka A, B, C, D s obzirom na trokut određen preostalim trima točkama kao njegovim vrhovima. Tada imamo četiri pravca, a sljedeći teorem pokazat će da se ti pravci sijeku u jednoj točki.

Teorem 5.4. *Četverokut $ABCD$ upisan je u kružnicu. Neka je s_A Simsonov pravac točke A s obzirom na trokut BCD. Slično definiramo s_B, s_C, s_D. Tako definirani pravci sijeku se u jednoj točki.*



Slika 5.3: Četverokut $ABCD$ upisan u kružnicu

Dokaz. U dokazu koristimo *Hamiltonov poučak* A.7 koji kaže:
Neka je ABC trokut, H ortocentar trokuta i O središte opisane kružnice trokuta ABC. U trokutu ABC tada vrijedi: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
Koristimo i svojstvo da Simsonovom pravcu točke P kružnice opisane trokutu ABC s obzirom na trokut ABC pripada polovište dužne $\overline{PH}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC.

Promatramo situaciju kao na slici 5.3.

Neka je s_A Simsonov pravac točke A s obzirom na trokut BCD kojemu je H_A ortocentar. Tada Simsonovom pravcu s_A pripada polovište dužine $\overline{AH_A}$. Označimo polovište dužine te dužine s K_A. Analogno definiramo Simsonove pravce s_B, s_C, s_D te polovišta K_B, K_C, K_D. Pokazat ćemo da su polovišta K_A, K_B, K_C, K_D ista točka K.

Dokažimo prvo da je $K_A = K_D$. Kada bi poloviše dužine $\overline{AH_A}$ i $\overline{DH_D}$ bila ista točka K imali bi dva sukladna trokuta AKH_D i DKH_A, po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta (vršni kutovi i krakovi jednakih duljina).
Zbog toga je dovoljno pokazati da je $|AH_D| = |DH_A|$ ili da je $\overrightarrow{AH_D} = \overrightarrow{DH_A}$.
Kako je H_D ortocentar trokuta ABC upisanog kružnici sa središtem u točki O po Hamiltonovu poučku vrijedi:

$$\overrightarrow{OH_D} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

i time

$$\overrightarrow{OH_D} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Oduzimanjem vektora na lijevoj strani dobijemo vektor $\overrightarrow{AH_D}$, a zbrajanjem vektora na desnoj strani pravilom paralelograma (romba) dobijemo vektor $2\overrightarrow{OI}$ gdje je I polovište dužine $\overline{BC}$.

$$\overrightarrow{AH_D} = 2\overrightarrow{OI}. \tag{5.1}$$

Na analogan način promatramo ortocentar H_A trokuta BCD upisanog kružnici sa središtem u točki O te pokažemo da vrijedi:

$$\overrightarrow{DH_A} = 2\overrightarrow{OI}. \tag{5.2}$$

Iz relacija 5.1 i 5.2 imamo: $\overrightarrow{AH_D} = \overrightarrow{DH_A}$, tj. $K_A = K_D$.
Analogno dokažemo da je $K_A = K_B$ te $K_A = K_C$.

Time smo dokazali da se Simsonovi pravci s_A, s_B, s_C, s_D koji redom sadrže polovišta dužina $\overline{AH_A}, \overline{BH_B}, \overline{CH_C}, \overline{DH_D}$ sijeku u zajedničkoj točki K. □

Dodatak A

U dokazima teorema koristili smo neke osnovne poznate teoreme. Navedimo ih.

Lema A.1 (Talesov teorem o obodnom i središnjem kutu)**.** *Središnji kut nad nekim lukom dane kružnice jednak je dvostrukom obodnom kutu nad istim lukom.*

Prema ovome teoremu, obodni kutovi nad istim kružnim lukom su sukladni.

Idući teorem također je posljedica već navedenog teorema.

Lema A.2 (Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice)**.** *Neka je dana kružnica k. Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od točki A i B, onda je kut $\sphericalangle ACB$ pravi.*

Lema A.3 (Kut tangente i sekante kružnice)**.** *Neka je dana kružnica k i neka je T točka kružnice. Kut što ga zatvaraju tangenta u točki T i sekanta kružnice koja prolazi točkom T jednak je obodnom kutu nad lukom koji određuje ta tangenta.*

Lema A.4 (Feuerbachova kružnica)**.** *Neka su A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, A_v, B_v, C_v nožišta visina, a H ortocentar trokuta ABC te neka su A'_v, B'_v, C'_v polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$. Devet točaka A', B', C', A_v, B_v, C_v, A'_v, B'_v, C'_v leže na jednoj kružnici kojoj su $\overline{A'A'_v}$, $\overline{B'B'_v}$, $\overline{C'C'_v}$ promjeri. Tu kružnicu nazivamo Feuerbachova kružnica. Središte je u točki E, polovištu dužine $\overline{OH}$, gdje je O središte kružnice opisane trokutu.*

Lema A.5. *Za dani trokut Feuerbachova kružnica k' i opisana kružnica k homotetične su kružnice s centrom homotetije u ortocentru H i koeficijentom $\frac{1}{2}$.*

Dokaz. Promotrimo tri dužine $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ što spajaju ortocentar H s vrhovima A, B, C danog trokuta ABC i polovišta K, L, M tih dužina.
Neka je s Φ označena homotetija sa središtem u ortocentru H koja preslikava:

$$A \longmapsto K$$

$$B \longmapsto L$$

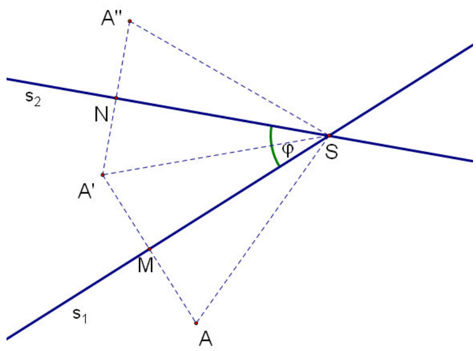
$$C \longmapsto M$$

Koeficijent takve homotetije očito je $\frac{1}{2}$.
Dakle, imamo homotetiju Φ sa središtem u ortocentru H i koeficijentom $\frac{1}{2}$.

Opisana kružnica trokutu ABC jednoznačno je određena s te tri točke. Ona se homotetijom Φ preslikava u kružnicu koja prolazi točkama K, L, M. Znamo da točke K, L, M pripdaju Feuerbachovoj kružnici k'. S tri točke je kružnica jednoznačno određena. Time je lema dokazana.

□

Lema A.6. *Kompozicija dvije osne simetrije o_1 i o_2, kojima se osi s_1 i s_2 sijeku u točki S, je rotacija $r = o_1 o_2$ s centrom u točki S i kutom rotacije 2φ, pri čemu je φ orijentirani kut što ga zatvaraju pravci s_1 i s_2.*



Slika A.1: Kompozicija dviju osnih simetrija je rotacija

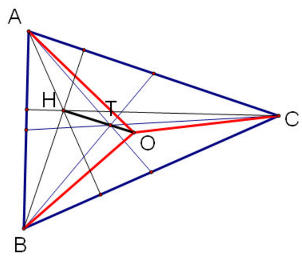
Dokaz. Simetrija o_1 preslikava točku A u točku A', a simetrija o_2 preslikava točku A' u točku A''. Produkt te dvije simetrije preslikava točku A u točku A''.
Dakle, neka je $A' = o_1(A)$ i $A'' = o_2(A)$. Tada je $A'' = \underline{o_1 o_2}(A)$.
Neka je M polovište dužine $\overline{AA'}$ i N polovište dužine $\overline{A'A''}$.
Znamo da vrijedi: $|SA| = |SA'| = |SA''|$, te za kutove:

$$\sphericalangle ASA'' = \sphericalangle ASA' + \sphericalangle A'SA'' = 2 \cdot \sphericalangle MSA' + 2 \cdot \sphericalangle A'SN = 2 \cdot (\sphericalangle MSA' + \sphericalangle A'SN)$$

$$\sphericalangle ASA'' = 2 \cdot \sphericalangle MSN = 2 \cdot \varphi.$$

□

Lema A.7 (Hamiltonov poučak)**.** *Neka je ABC trokut, H je ortocentar trokuta ABC i O je središte kružnice opisane trokutu ABC.*
Tada u trokutu ABC vrijedi: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.



Slika A.2: Težište T, ortocentar H i središte O opisane kružnice trokuta ABC

Dokaz. Neka je T težište trokuta ABC.
Zbrojamo vektore $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} = 3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}). \quad \text{(A.1)}$$

Prema teoremu o Eulerovom pravcu znamo da su težište T, ortocentar H i središte trokutu opisane kružnice O trokuta ABC kolinearne točke pri čemu vrijedi: $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$, zato je $3\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OH}$.

Prema poučku o težištu trokuta i tome da je zbroj vektora težišnica jednak nulvektoru znamo da za težište T trokuta ABC vrijedi: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}$.
Primjenimo li sada to na relaciju A.1 imamo:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} = 0.$$

□

Bibliografija

[1] S. Marić, *Neki poučci o trokutu*, Matematika i škola, br. 15 (2002.), 223 - 226.

[2] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[3] V. Prasolov , *Problems in plane and solid Geometry*, preveo D. Leites, dostupno na: http://students.imsa.edu/ tliu/Math/planegeo.pdf (pristupljeno: kolovoz, 2014.).

[4] M. Riegel, *Simson's Theorem*, dostupno na: https://www.whitman.deu/mathematics/ SeniorProjectArchive/2006/riegelmj.pdf (pristupljeno: rujan, 2014.).

[5] Y. Sortais, R. Sortais, *La geometrie du triangle*, Hermann, 1997.

[6] P. Yiu, *Introduction of the Geometry od the Triangle*,(2002.), dostupno na: http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf (pristupljeno: kolovoz, 2014.).

[7] *Robert Simson*, dostupno na: www.history.mcs.stand.ac.uk/Biographies/Simson.html (pristupljeno: rujan, 2014.).

Sažetak

Na početku ovog diplomskog rada definiramo Simsonov pravac kao pravac kojemu pripadaju ortogonalne projekcije točke P kružnice opisane trokutu ABC na pravce kojima pripadaju stranice tog trokuta. Upoznamo se i s nekim njegovim svojstvima. Nakon toga definiramo još jedan skup kolinearnih točaka koje pripadaju Steinerovom pravcu. U nastavku poglavalja o Steinerovom pravcu navode se i dokazuju svojstva Steinerovog pravca, zatim veza Simsonovog pravca i Steinerovog pravca te još neka posebna svojstva Simsonovog pravca.
Treće poglavlje posvećeno je međusobnom odnosu dvaju Simsonovih pravaca, dok se u četvrtome poglavlju susrećemo s poopćenim Simsonovim pravcem te njegovim odnosom sa Simsonovim pravcem.
Na samom kraju rada promatramo Simsonove pravce svakog od vrhova tetivnog četverokuta.

Summary

At the beginning of this thesis Simson's line with it's proporties is defined. It's a line that encompasses the orthogonal projection of a point P of a circle of a triangle ABC on the line's that belong to the sides of the triangle. Furthermore, a set of colinear points belonging to Steiner's line is defined. In the following chapter the properties of the Steiner's line are are listed and proved. Additionally we introduce the link between Steiner's line and Simson's line.
Third chapter is dedicated to the relationship between the two Simson's lines, while in the fourth we meet generalized Simsons line and it's relationship to Simsons line.
At the very end we observe Simson's line of each of the vertices of a cyclic quadrilateral.

Životopis

Rođena sam 30. 8. 1989. godine u Slavonskom Brodu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1996. godine u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Slavonskom Brodu. Tada sam posebno zavoljela matematiku i odlučila da ću jednog dana biti profesorica matematike. Godine 2004. upisujem se u gimnaziju "Matija Mesić", prirodoslovno-matematički smijer u Slavonskom Brodu, gdje sam 2008. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje školovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2012., nakon završenog preddiplomskog studija matematike; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički koji upravo završavam.